Соқтығысулар

1. Соқтығысу кезіндегі сақталу заңдары.
2. Серпімді соқтығысу.
3. Серпімсіз соқтығысу.

Соқтығысу деп кеңістіктің салыстырмалы түрде аздаған ғана облысында салыстырмалы түрде аздаған ғана уақыт аралығында жүретін екі немесе өте көп материялық денелердің, бөлшектердің және т.с. әсерлесуін айтады.

Соқтығысуды қарастыру кезінде ең басты нәрсе процестің өзін білу емес, оның нәтижесі. Соқтығысуға дейінгі мезет бастапқы күй, ал одан кейінгі-соңғы күй деп аталады. Бастапқы және соңғы күйлерді сипаттайтын шамалар арасында, әсерлесудің сипатымен тәуелсіз белгілі қатынастар орнатылады. Осы қатынастардың бар екендігі, соқтығысуға қатынасатын денелер мен бөлшектердің жиынтығының энергияның, импульстің және импульс моментінің сақталу заңдары орындалатын тұйық жүйені құрайтындығы болып табылуын көрсетуінде. Ендеше, бөлшектер немесе денелердің бастапқы және соңғы күйлерін сипаттайтын шамалар арасындағы қатынастар, соқтығысу кезіндегі энергияның, импульстың және импульс моменттерінің сақталу заңдарымен өрнектеледі.

Импульстың сақталу заңы. Әртүрлі денелердің импульстерінің соқтығысуға дейінгісін $\vec{P_i}$ арқылы, ал соқтығысудан кейінгісін $\vec{p'_j}$ арқылы белгілейік *(i=1, 2, 3….n; j=1, 2, 3....k).* Тұйық жүйенің импульсі сақталатындығын біле отырып мынаны жазуға болады:

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_i} = \sum_{j=1}^{k} \overrightarrow{p'_j} \qquad (92)$$

Осы заң релятивистік және релятивистік емес жағдайларда да орындалады.

Энергияның сақталу заңы. Соқтығысу кезіндегі энергияның сақталу заңы мына өрнекпен беріледі:

$$\sum_{i=1}^{n} (E_{ішкі,i} + E_{к,i}) = \sum_{j=1}^{k} (E'_{ішкі,j} + E'_{к,j}), \qquad (93)$$

бұл жерде $E_{ішкі}$ – денелердің ішкі энергиясы, $E_к$ - олардың ілгерілемелі қозғалыстарының кинетикалық энергиясы, *i* мен *j* соқтығысуға дейінгі және соқтығысудан кейінгі денелердің сандары және соларға сәйкес энергияларды сипаттайды.

Бұл жерде айта кететін бір мәселе, $E_{ішкі}$ (ішкі энергия) соқтығысу кезінде пайда болатын жылу энергиясынан және соқтығысатын денелерді құрайтын бөлшектердің өзара әсерлесу потенциалы энергияларының қосындысынан тұрады. Біздің қарастырып отырғанымыз тек релятивистік емес жағдай. Ал, тікелей соқтығысатын денелердің арасындағы әсерлесу потенциалы энергиясын біз қарастырмаймыз, өйткені денелер соқтығысуға дейін және соқтығысудан кейін әсерлесіп тұр деп есептелінбейді.

Импульс моментінің сақталу заңы. Соқтығысу кезіндегі импульс моментінің сақталу заңы мына өрнекпен беріледі

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{L}_i + \vec{L}_{iшшқi} = \sum_{j=1}^{k}(\overrightarrow{L'_j} + \overrightarrow{L'}_{iшкi,j}) \qquad (94)$$

бұл жерде $\vec{L}$ – соқтығысуға қатысатын денелердің импульс моменттері, ал $\overrightarrow{L}_{iшкi}$ олардың ішкі импульс моменттері.

Серпімді соқтығыс. Егер де соқтығысу кезінде денелердің ішкі энергиясы өзгермейтін болса, онда соқтығысу серпімді деп аталады. Ішкі энергия абсолютті түрде өзгермейтін болса, соқтығысу абсолют серпімді соқтығысу деп аталады.

Релятивистік емес жағдайдағы денелердің соқтығысын қарастырайық. Координат жүйесін таңдаған кезде соқтығысуға дейінгі екі дененің біреуі тыныштықта түр деп есептейік, былайша айтқанда $\overrightarrow{p_2} = 0$.

Ендеше (92) және (93) формулаларды қолдана отырып энергияның және импульстің сақталу заңдарын былай жазуға болады:

$$\frac{p_1^{\ 2}}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^{\ 2}}{2m_2} \qquad (95)$$

$$\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_1'} + \overrightarrow{p_2'}, \qquad (96)$$

бұл жерде кинетикалық энергия импульс *[mυ²/2 = P²/(2m)]* арқылы өрнектелген және серпімді соқтығыс кезінде ішкі энергия өзгермейді деп есептелінген. (95) және (96) өрнектерді бірге шеше отырып келесі теңдеуді аламыз:

$$p_2' = \left[\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right] p_1 \cos\theta, \qquad (97)$$

бұл жерде P_1 бірінші дененің (массасы m_1) соқтығысқа дейінгі импульсі, ал P_2' екінші дененің (массасы m_2) соқтығыстан кейінгі алған импульсі, ал θ дегеніміз $\overrightarrow{P_1}$ мен $\overrightarrow{P_2'}$ векторларының арасындағы бұрыш.

Осы алынған өрнек қарастырылып отырған есепті толығымен шеше алады деп есептеуге болады.

Маңдайлық соқтығыс. *Θ=0* болсын. Осы жағдайда соқтығысу маңдайлық (центрлік) деп аталады.

Θ = 0 деп есептей отырып (97) өрнектен келесі формуланы аламыз:

$$p_2' = \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) p_1, \qquad (98)$$

ал (98) формуладан мына формуланы шығарып аламыз:

$$E_{K2}' = \left[\frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}\right] E_{K1}. \qquad (99)$$

Көрініп тұрғандай, энергияның максимал берілуі денелердің массалары тең болған кезде жүзеге асырылады. Бұл жағдайда

$$E_{K2}' = E_{K1}, \qquad (100)$$

былайша айтқанда бірінші дененің энергиясы толығымен екіншіге беріледі. Бірінші дене бұл кезде тоқтайды.

Осы нәтижені импульстің сақталу заңы (96) мен (98) формуладан да шығарып алуға болады. $m_1 = m_2$ деп есептей отырып (98) формуладан

$$\overrightarrow{P_2'} = \overrightarrow{P_1} \qquad (101)$$

өрнегіне келеміз. Осыны (96) формулаға қойсақ

$$\overrightarrow{P_1'} = 0 \qquad (102)$$

теңдігін аламыз.

(99) формуланы зерттей отырып соқтығысатын денелердің массалары бір-бірінен өте алшақ болған жағдайда ($m_1 \geq m_2$ немесе $m_2 \geq m_1$) берілетін энергияның өте аз болатындығын көрсетуге болады, б.а. екі жағдайда да $E'_{K2} \leq E_{K1}$.

Серпімсіз соқтығыс. Соқтығысу кезінде денелердің ішкі энергиясы өзгеретін болса, онда соқтығысу серпімсіз деп аталады. Егер де соңғы күйде бүкіл энергия ішкі энергияға ауысып кететін болса, соқтығысу абсолют серпімсіз соқтығысу деп аталады.

Абсолют серпімсіз соқтығысуды қарастырайық. Бұл жағдайда соқтығысатын денелер бір бірімен қосылып бір дене болып кетеді. Массасы m_2 екінші дене соқтығысуға дейін тыныштықта тұр деп есептеп, келесі сақталу заңдарын жазуға болады:

$$E_{ішкі,1} + E_{ішкі,2} + E_{K,1} = E'_{ішкі,(1+2)} + E'_{K,(1+2)} \qquad (103)$$

$$\vec{P}_1 = \vec{P'}_{(1+2)} \qquad (104)$$

бұл жерде $E_{ішкі,\,1}$ және $E_{ішкі,\,2}$ - бірінші және екінші денелердің соқтығысуға дейінгі ішкі энергиялары, $E_{к,\,1}$ қозғалыстағы дененің кинетикалық энергиясы, $\vec{P}_1$ – оның импульсі, $E'_{ішкі,(1+2)}$, $E'_{K,(1+2)}$ және $\vec{P'}_{(1+2)}$ – қосылып кеткен денелердің ішкі және кинетикалық энергиясы және импульсі.

Осы теңдеулерді қолданып бірнеше есептерді шығаруға болады. Мысалы (104) теңдеуді пайдаланып қосылу нәтижесінде алынған дененің жылдамдығын табуға болады:

$$v_2 = v'_{(1+2)} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1.$$

Осы формулалардың көмегімен ішкі энергияға айналған кинетикалық энергияны да есептеуге болады:

$$\Delta E_K = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) v_2^2}{2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_{K1}.$$

2 Модуль үшін студенттердің өздік жұмысы (СӨЖ)

Үйкеліс күштері және олардың түрлері.
Қатты дененің деформациясы. Гук заңы.
Массасы айнымалы денелердің қозғалыстары.

3 МОДУЛЬ
АБСОЛЮТ ҚАТТЫ ДЕНЕНІҢ ДИНАМИКАСЫ. ИНЕРЦИЯЛЫҚ ЕМЕС САНАҚ ЖҮЙЕЛЕРІНДЕГІ ҚОЗҒАЛЫС. ТАРТЫЛЫС ӨРІСІНДЕГІ ҚОЗҒАЛЫС.

Инерция тензоры. Инерция моменті. Қатты дененің кинетикалық энергиясы

1. Абсолют қатты дене ұғымы. Инерция тензоры. Қатты дененің инерция моменті. Қатты дененің айналмалы қозғалысының қозғалмайтын өске қарасты динамика теңдеуі
2. Гюйгенс – Штейнер теоремасы
3. Айналыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясы.

Санақ денесі болып кез келген дене алына алады. Алайда, евклидтік геометрия ұғымдарын пайымдап бекіту кезінде басты рөлді **абсолют қатты дене** атқарған болатын. **Абсолют қатты** деп кез келген нүктелерінің арасындағы қашықтық өзгеріссіз болатын денені айтады.

Қатты дене ара қашықтығы тұрақты болатын материялық нүктелер жүйесі ретінде қарастырыла алады. Сондықтан, материялық нүктелер жүйесі тұралы пайымдаулар мен теңдеулер қатты денелер үшін де қолданылады. (50) және (52) теңдеулерді, осы жерде тағы да жазып көрсете кетейік:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \overrightarrow{M} \tag{105}$$

Бұл теңдеулер жүйесі жалпы алғанда тұйық жүйе болып саналмайды. Алайда, олар қатты дене үшін тұйық теңдеулер жүйесі болып табылады.

Инерция тензоры. Инерция моменті

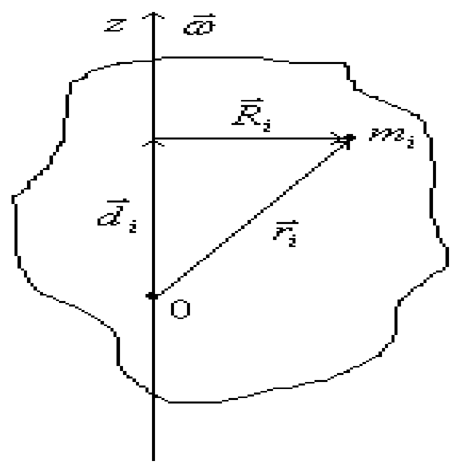
Қатты дененің қозғалысын толық сипаттаған кезде оның қозғалыстағы бір нүктесін қараумен қоса, осы нүктені бекітілу нүктесі деп, соның айналасындағы қозғалысты білу қажет болады. Бұл жерде инерция тензоры деп аталатын ұғымның маңызы зор.

Денені О нүктесіне бекітейік. О нүктесіне салыстырғанда m_i нүктенің радиус - векторын $\vec{r}_i$ – деп белгілейік (8 Сурет). Дененің лездік бұрыштық жылдамдығы $\vec{w}$, ендеше дененің *i* нүктесінің жылдамдығы $\vec{V}_i = \vec{w} \times \vec{r}_i$.

Осы берілгендерді қолдана отырып, жалпы алғанда бекітілу нүктесінен өтетін лездік айналу өсіне қатысты қозғалысты келесі өрнекпен сипаттауға болады:

$$\vec{L} = \vec{\omega}\sum m_i r_i^2 - \sum m_i \vec{r}_i\left(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i\right) \qquad (106)$$

мұндағы $\vec{L}$ - бекітілу нүктесіне қарасты бүкіл дененің импульс моменті.



8 Сурет.

(106) векторлық өрнекті координат өстеріне үш проекция түрінде былай жазуға болады:

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \qquad (107)$$

$$L_z = I_{xx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

бұл жерде $I_{xx} = \sum m_i(\vec{r}_i^{\,2} - x_i^2)$, $I_{xy} = -\sum m_i x_i y_i, I_{xz} = -\sum m_i x_i z_i$ және басқа шамалар да осы жолмен өрнектеледі: I_{yy} , I_{yx}, I_{yz} т.б.

I_{xx}, I_{yy} , I_{zz} шамалары өстік инерция моменттері , ал $I_{xy} = I_{yx}$,$I_{xz} = I_{zx}$ және $I_{yz} = I_{zy}$ - центрден тепкіш инерция моменттері деп аталады.

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \qquad (108)$$

шамалардың жиынтығы инерция тензоры деп аталады. I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} тензордың диагональ элементтері, ал қалғандары диагональ емес элементтері деп аталынады.

Тензордың диагональ емес элементтері нөлге тең деп есептесек, онда ол мына түрге келеді:

$$\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \qquad (109)$$

Бұл жағдайда координат өстерімен дәл келетін дененің өстері инерцияның бас өстері, ал $I_x = I_{xx}$, $I_y = I_{yy}$, $I_z = I_{zz}$ шамалары бас инерция моменттері деп аталады.

Егер бас өстер дененің массалық центрінен өтетін болса, олар орталық бас өстер деп аталынады.

Көп жағдайда өске қатысты дененің инерция моментінің маңызы жоғары. Ол z өсіне қатысты былай өрнектеледі (8 сурет)

$$I_{zz} = \sum m_i(\vec{r}_i^{\,2} - z_i^2) = \sum m_i R_i^2 \qquad (110)$$

бұл жерде R_i- өстен нүктеге дейінгі ең жақын арақашықтық.

Қозғалмайтын өске қарасты қатты дененің айналмалы қозғалысы динамикасының теңдеуі. Радиусі R_i шеңбер бойымен (8 сурет) массасы m_i материялық нүктенің айналуы кезіндегі оның айналу өсіне проекцияланған импульсының моменті $L_i=m_iv_iR_i$ -ге тең. Сызықтық жылдамдық $v_i=wR_i$, сондықтан $L_i=m_iR_i^2w$, мұнда w – бұрыштық жылдамдық. Егер, z өсін айнала материялық нүктелер жүйесі айналып тұратын болса, онда $L=\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^{\,2} w$. Бұдан шығатыны

$$L = Iw \qquad (111)$$

мұнда $I=\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^{\,2}$, ал w тұрақты шама ретінде қосындының таңбасының алдына шығарылған.

Материялық нүктелер массаларының олардың айналу өсіне дейінгі қашықтықтарының квадратына көбейтіндісінің қосындысына тең *I* шамасы осы өске қарасты жүйе **инерциясының моменті** деп аталады. Егер масса үздіксіз таралған болса, онда қосынды таңбасы интеграл таңбасымен алмастырылады, ал инерция моменті мынадай түрде жазылады:

$$I = \int R^2 dm \qquad (112)$$

Дененің инерция моменті – ілгерілемелі қозғалыс кезіндегі массаға теңдес физикалық шама; ол дененің формасына, мөлшеріне, массасына және оның дене ішінде таралуына, сонымен қоса айналу өсін таңдауға тәуелді, ол айналмалы қозғалыс кезіндегі дененің инерттілігін сипаттайды.

Айналмалы қозғалыстың динамикасының негізгі заңын (111)-ді ескере отырып айналу өсіне проекциясында былай жазуға болады:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(Iw) = M \qquad (113)$$

мұнда *M* – сыртқы күштердің қосынды моментінің айналу өсіне проекциясы.

Қозғалмайтын өсті айнала қатты дененің айналуының жекелеген жағдайында (113) теңдеу мына түрге өзгереді:

$$I \frac{dw}{dt} = M \quad (114)$$

немесе

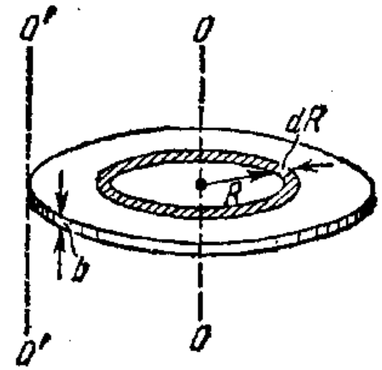
$$I \cdot \beta = M \quad (115)$$

мұнда β – бұрыштық үдеу.

(115)теңдеу қозғалмайтын өске қарасты қатты дененің айналмалы қозғалылыс динамикасының негізгі теңдеуі деп аталады.

Әрбір денеде, дененің қозғалыста не тыныштықта болғанына қарамастан массасы болатындығы сияқты, ол дененің айналуда ма, немесе тыныштықта тұрғанына қарамастан, кез келген өске қарасты белгілі бір инерция моменті болады.

Мысал ретінде, диск жазықтығына перпендикуляр және оның центрі арқылы өтетін өске қарасты, яғни ОО өсіне қарасты, біртекті дискінің инерция моментін табайық (9 сурет).



9 Сурет.

Бұл үшін (112) формуласын қолданамыз да мынаны табамыз:

$$I = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV$$

мұнда ρ – дискінің тығыздығы, ал dV – сақиналық қабаттың көлемі.

$$dV = b\,2\pi\,R\,d\,R$$

мұнда *b* – дискінің қалыңдығы.

Бұл формулардан, дискінің *m* массасын енгізе отырып біржолата мынаны аламыз:

$$I = \frac{mR_o^{\ 2}}{2}$$

мұнда R_o – дискінің радиусі.

Қарастырылған мысалдағы инерция моментін табу дене біртекті және симметриялы болғандықтан, ал біз инерция моментін симметрия өсіне қарасты іздегендіктен тым қарапайымдау болды. Егер де біз дискінің инерция моментін, мысалы, дискіге перпендикуляр және оның шетімен өтетін О'О' өсіне қарасты іздеген болсақ, бәлкім, есептеулер әлдеқайда күрделірек болып шығар ма еді. Мұндай жағдайларда инерция моментін табу, егер де **Гюйгенс – Штейнер теоремасын** пайдаланса, анағұрлым жеңілденер еді: еркін өске қарасты I инерция моменті берілген өске параллель және дене массасының центрінен өтетін өске қарасты I_c инерция моментін дененің m массасы мен өстер аралық a қашықтығы квадратының көбейтіндісіне қосқандағы шамаға тең:

$$I = I_c + ma^2$$

Айналыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясы.

Кез келген О нүктеге бекітілген қатты дененің қозғалысын қарастырайық. Осы О нүктемен өстері еркін бағытталған декарттық координаталар жүйесін байланыстырамыз. Сөйтіп денені құраушы і-ші нүктенің кинетикалық энергиясын

$$E_{ki} = \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} = \frac{m_i\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right)^2}{2} = \frac{m_i}{2}\omega^2 r_i^2 \sin^2\alpha \qquad (116)$$

формула көмегімен есептейміз. Ары қарай (116)-ді түрлендіріп, оны былай жазуға болады:

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i \left[\vec{\omega}^2 \vec{r}_i^{\,2} - \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i\right)^2\right]$$

Алынған нәтижені барлық элементар массалар бойынша өзара қосып, дененің кинетикалық энергиясын табамыз:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\vec{\omega}^2 \vec{r}_i^{\,2} - \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i\right)^2\right] \qquad (117)$$

Енді көбейтінділерді координаталық өстерге проекциялар арқылы жазсақ, әрі қарай түрлендірсек, онда түпкілікті нәтижеге келеміз:

$$E_k = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} I_{xx}\omega_x{}^2 + I_{xy}\omega_x\omega_y + I_{xz}\omega_x\omega_y + I_{yx}\omega_y\omega_x + I_{yy}\omega_y^2 + \\ + I_{yz}\omega_y\omega_z + I_{zx}\omega_z\omega_x + I_{zy}\omega_z\omega_y + I_{zz}\omega_z^2 \end{array}\right] \qquad (118)$$

Алынған формуланың күрделілігі декарттық координаталар жүйесін еш таңдаусыз қабылдауға байланысты болып отыр. Егер координаталар жүйесінің өстерін дененің инерциясының бас өстерімен бірдей қылып алса, центрден тепкіш инерция моменттері нөлге тең болып, (118) теңдеу едәуір ықшамдалады:

$$E_k = \frac{1}{2} \left[I_x\omega_x{}^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right] \qquad (119)$$

Егер дененің бекітілген нүктесін және сонымен қоса координаталардың бастапқы нүктесін дененің массалық центріне ауыстырса, ал координаталар өстерін инерцияның центрлік бас өстерімен біріктірсе, дене инерцияның бас өстерінің біреуін, мысалы z өсін, айнала қозғалады. Онда (119) тіпті қарапайым түрге келеді:

$$E_k = \frac{1}{2} I\omega^2 \tag{120}$$

Поступательное движение	Вращательное движение
$\mathbf{v}$ — линейная скорость	$\dot{\omega}$ — угловая скорость
$\mathbf{w}=\mathbf{v}$ — линейное ускорение	$\beta = \dot{\omega}$ — угловое ускорение
m — масса	I — момент инерции
$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — импульс	$M_z = I\omega_z$ — момент импульса *)
$\mathbf{F}$ — сила	$\mathbf{N}$ или N_z — момент силы
$\mathbf{p} = \mathbf{F}$	$\mathbf{M} = \mathbf{N}$
$m\mathbf{w} = \mathbf{F}$	$I\beta_z = N_z$ *)
$T = mv^2/2$	$T = I\omega^2/2$ *)
$dA = F_s\, ds = F_v\, ds$	$dA = N_\omega d\varphi$

*) Для неподвижной оси вращения